

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE (Z LABORATORIUM)

Kolokwium, 15 IV 2025, 90 minut

Proszę każde zadanie rozwiązywać na osobnej kartce, podpisanej własnym imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

Na ocenę będzie miała wpływ nie tylko poprawność wyników, ale w dużym stopniu także ich uzasadnienie.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązanie wysycone zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = (1 + y^2)(\operatorname{arctg} y + xe^x), \quad y(0) = 0$$

oraz jego maksymalny przedział istnienia.

Zadanie 2. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = \frac{y}{x(y^3 - \ln x)}, \quad y(1) = 1.$$

Zadanie 3. Niech $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $n \geq 0$. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania

$$y' = y - p_n(x),$$

które też jest wielomianem stopnia n .

Zadanie 4. Do równania $y' = f(x, y)$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ stosujemy schemat Rungego-Kutty z parametrami $a \neq 0, b \neq 0$ dany tabelką Butchera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ a & b & \\ \hline & \frac{1}{a} & \frac{1}{2b} \end{array}$$

Dla jakich a i b schemat jest rzędu co najmniej 1? Wyznacz wartości tych parametrów, dla których jest on maksymalnego rzędu.